TRUNG TÂM KỸ NĂNG LÀM TOÁN

THS.PHÙNG QUYẾT THẮNG

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA CỰC ĐẠI, CỰC TIỂU CỦA HÀM SỐ BẬC 3

PHƯƠNG PHÁP P.Q.T

Một phương pháp mới mang tính ưu việt hơn các phương pháp trước đó.

Kết quả rõ ràng mang tính trực quan cao!

HÀ NỘI, THÁNG 9 NĂM 2016

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA CỰC ĐẠI, CỰC TIỂU CỦA HÀM SỐ BẬC 3

PHƯƠNG PHÁP PHÙNG QUYẾT THẮNG

I. Đặt vấn đề:

Xét hàm số $y = f(x)$ liên tục và khả vi trên tập xác định của nó. Nếu f(x) được phân tích thành $f(x) = h(x).f'(x) + g(x)$ thì g(x) chính là phương trình đi qua điểm cực trị của hàm số f(x).

Thật vậy: giả sử f(x) tồn tại các điểm cực đại, cực tiểu có hoành độ là $x_{CĐ}$, x_{CT} thì

$$f'(x_{CĐ}) = f'(x_{CT}) = 0 \qquad (1)$$

Khi đó, thay $x_{CĐ}$, x_{CT} vào f(x) và kết hợp với (1), ta được:

$$f(x_{CĐ}) = h(x_{CĐ}).\underbrace{f'(x_{CĐ})}_{0} + g(x_{CĐ}) = g(x_{CĐ}) \qquad (2)$$

$$f(x_{CT}) = h(x_{CT}).\underbrace{f'(x_{CT})}_{0} + g(x_{CT}) = g(x_{CT}) \qquad (3)$$

Từ (2), (3) suy ra g(x) là phương trình đi qua điểm cực đại cực tiểu của hàm số (đpcm). Bằng cách thực hiện phép chia đa thức y/y' ta tìm được thương $h(x)$ và phần dư $g(x)$. Đây chính là cách làm phổ biến hiện nay.

Áp dụng cho hàm bậc 3 $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ với } a \neq 0$ thì $y' = f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Khi đó, g(x) và h(x) đều có dạng là hàm số bậc nhất:

$$g(x) = \underbrace{\left(\frac{2c}{3} - \frac{2b^2}{9a}\right)}_{E} x + \underbrace{d - \frac{bc}{9a}}_{F} \qquad (4)$$

$$h(x) = \frac{x}{3} + \frac{b}{9a} \qquad (5)$$

Những phương pháp tìm nhanh hàm g(x) đều xoay quanh phép chia đa thức y/y' điển hình là phương pháp lập bảng hệ số chia bậc 2, phương pháp chia bằng máy tính Fx570 với phép gán x = 1000 (một dạng biến thể của khai triển đa thức của tác giả Bùi Thế Việt).

Gần đây, tác giả Hoàng Trọng Tấn có chia sẻ thêm một cách tìm hàm g(x) bằng thuật toán truy hồi như sau:

$$g(x) = \frac{1}{9a}(Ex + F) \text{ trong đó: } \begin{cases} F = T(0) \\ E = T(1) - T(0) \end{cases} \text{ với } T(x) = 9a.y - \frac{y'.y''}{2}$$

Cái hay của phương pháp này ở chỗ hàm g(x) được tìm bằng biểu thức $f(x) - h(x).f'(x)$. Đây là cơ sở quan trọng trong phương pháp PQT tôi muốn giới thiệu ở phần sau.

Phương pháp HTT kết hợp với máy tính Fx570 cho kết quả nhanh hơn các phương pháp chia đa thức hiện nay và có thể áp dụng với bài toán chứa tham số. *Đây là phương pháp có tính đột phá cao; tuy nhiên hướng giải quyết chưa phải là phương án tối ưu nhất.*

Chính vì vậy, tôi xin đề xuất một phương pháp mới có tính ưu việt hơn để giải quyết bài toán này. Bởi nó giải quyết được 2 vấn đề quan trọng, đó là:

1. Tìm được mối quan hệ giữa hàm g(x) và các đạo hàm của f(x) nên dạng biểu thức đơn giản hơn, dễ nhớ và dễ áp dụng. Mối quan hệ đó là: $g(x) = y - \frac{y'.y''}{3.y'''}$

2. Sử dụng bài toán tính giá trị biểu thức, chỉ cần một phép gán $x = i$ cho luôn chính xác kết quả phương trình đường thẳng đi qua điểm CĐ, CT cần tìm. Với bài toán chứa tham số, bài toán này cho kết quả vẫn trực quan và tốc độ xử lý nhanh nhưng phải thêm bước biên dịch lại kết quả.

II. Phương pháp Phùng Quyết Thắng – Tìm phương trình đường thẳng qua điểm CĐ, CT của hàm số bậc 3

1. Cơ sở của phương pháp

Từ cơ sở trong phần đặt vấn đề, hàm g(x) luôn là phương trình đi qua điểm cực đại, cực tiểu của hàm $f(x)$ nên $g(x)$ hoàn toàn có thể được biểu diễn qua biểu thức $f(x) - h(x).f'(x)$. Áp dụng cho hàm đa thức bậc 3, ta có:

$$f(x) - \left(\frac{x}{3} + \frac{b}{9a}\right) f'(x) \qquad (3)$$

Ở đây hàm g(x) có dạng bậc nhất nên biểu thức (3) cũng sẽ có dạng bậc nhất . Do đó, ta có thể biểu diễn hàm g(x) tương tự dạng đại số của số phức. Đây chính là cơ sở cho phép ta ứng dụng số phức vào biểu thức (3) thông qua phép gán $x = i$.

2. Xây dựng công thức

Từ hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \neq 0$, ta dễ dàng tìm được:

$$\begin{cases} y' = f'(x) = 3ax^2 + 2bx + C \\ y'' = f''(x) = 6ax + 2b \\ y''' = f'''(x) = 6a \end{cases}$$

Biểu thức (3) hoàn toàn có thể áp dụng vào tính toán. Tuy nhiên, hàm $h(x)$ của bậc 3 có một tính chất thật vi diệu. Một chút nhạy cảm trong lúc băn khoăn làm thế nào xử lý mẫu số 18a cho công thức cải tiến của phương pháp HTT, tôi bất chợt nghĩ đến y''' và phát hiện ra mối quan hệ rất đặc biệt này:

$$h(x) = \frac{x}{3} + \frac{b}{9a} = \frac{3ax + b}{9a} = \frac{6ax + 2b}{18a} = \frac{y''}{18a} = \frac{y''}{3.6a} = \frac{\mathbf{y''}}{\mathbf{3y'''}}$$

Quả thực, hàm $g(x)$ có dạng quá đẹp. Không còn hệ số a, các đạo hàm có thể tính lần lượt thông qua hàm $f(x)$. Và điều tuyệt vời đó chính là:

$$\boldsymbol{g(x) = y - \frac{y'.y''}{3.y'''}} = f(x;m) - \frac{f'(x,m).f''(x,m)}{3f'''(x;m)} = Ex + F$$

Bạn không thể tưởng tượng cái cảm giác sung sướng của tôi sau mấy ngày vật vã với phép biến đổi vu vơ khi cố gắng cải tiến biểu thức trong phương pháp của HTT. Đó là một sự đột phá mãnh liệt có sức mạnh ghê gớm. Tôi lúc đó như phát điên lên, và não tôi như vụt sáng tại sao phải làm toán ngược như của Tấn, mà không khai triển đa thức. Ý tưởng số phức ra đời là dựa trên cách làm tôi áp dụng cho bài toán viết phương trình tiếp tuyến tại một điểm x_0 mấy hôm trước tìm ra.

Hôm nay tôi viết bản thảo này là lần viết thứ 3, sau bản thảo lần đầu tôi nhờ tác giả của phương pháp tiên phong Hoàng Trọng Tấn đọc giúp. Cậu ấy còn sung sướng có lẽ hơn cả tôi khi đó, vội đăng tin chia sẻ một đoạn bài viết trên trang FB cá nhân của mình khiến tôi có đôi chút áp lực. Tôi có chia sẻ với cậu ấy cảm nghĩ của mình về trường hợp của một người trong giới toán bị chỉ trích gần đây chỉ vì vài lỗi toán không đáng có.

Chính vì lẽ đó, niềm hạnh phúc của tôi sẽ chỉ được nhân rộng khi chính tôi nghĩ đến người đọc tác phẩm của mình. Tôi tin họ sẽ không trách tôi nhiều khi tôi thực sự dành tâm huyết với nó. Tôi muốn nói với các bạn rằng, tôi yêu các bạn nhiều và yêu say đắm sự kiêu kì của em ấy! Vẻ đẹp toán học luôn là niềm cảm hứng bất tận trong trái tim tôi !

3. Kỹ thuật Casio Fx570 tìm nhanh pt đường thẳng qua điểm CĐ, CT

- Chuyển máy tính sang môi trường Mode 2 (môi trường số phức)
- Nhập vào máy biểu thức thức (ở đây m là tham số)

$$y - \frac{y'.y''}{3y'''} = f(x;m) - \frac{f'(x,m).f''(x,m)}{3f'''(x;m)}$$

- Ấn dấu = để lưu biểu thức
- Ấn CALC : x = i (đơn vị số phức) ; m = 100 hoặc 1000 (nếu có tham số m)
- Kết quả trả về có dạng đại số của số phức z= a+bi tương ứng với y = Ex +F
- Dịch kết quả :

+ Nếu hàm số bậc 3 không chứa tham số m, kết quả hiện trên màn hình là kết quả chính xác. Ta chỉ việc thay giá trị i thành x trong kết quả thực tế.

+ Ngược lại, hàm số bậc 3 chứa tham số m, ta phải tiến hành dịch kết quả số thành biểu thức chứa m như sau : nếu CALC với $m = 100$, kết quả trả về là $10601 - 19788i$ thì ta hiểu như sau :

Với số 10601, ta tách từ phải sang trái 2 chữ số thành 1|06|01 . Nếu 2 chữ số < 50 như trong ví dụ này thì giữ nguyên số đó. 1|06|01 = 1|00|00 + 06|00 + 01 = $(100)^2$ + 6.(100) +1 = $m^2 + 6m + 1$

Với số -19788, ta tách từ phải sang trai 2 chữ số thành - (1|97|88). Nếu 2 chữ số > 50 như trong ví dụ này thì lấy 100 trừ đi 2 chữ số đó, số 100 ta nhớ là 1 đơn vị để đẩy sang chữ số tiếp theo, còn số còn lại là số cần tìm. Ở đây 88 được hiểu là 88 = 100 – 12 thì -12 là số cần tìm, và nhớ phải thêm 1 vào chữ số tiếp theo. Sau 88 là 97 phải cộng thêm 1 thành 98, tách 98 thành 100 – 2 thì số cần tìm tiếp

theo là -2m, nhớ tiếp 1 đơn vị. số cuối cùng là 1 phải cộng thêm 1 là $2m^2$. Vậy -1|97|88 = - ($2m^2$ – 2m - 12).

4. Ví dụ minh họa :

VD1 : Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 5x + 1$. Ta luôn có thể tính nhẩm nhanh (không cần ghi ra nháp) các đại lượng:

$$y' = 3x^2 + 6x - 5; y'' = 6x + 6;\ y''' = 6$$

Để tìm phương trình đường thẳng qua CĐ, CT ta làm như sau:

BƯỚC	CÁCH THỰC HIỆN	MÀN HÌNH MÁY TÍNH
1	Chuyển sang môi trường mode 2, nhập vào máy tính biểu thức: $x^3 + 3x^2 - 5x + 1 - \frac{(3x^2 + 6x - 5)(6x + 6)}{3 \times 6}$	
2	Ấn dấu $=$ để lưu lại biểu thức.	-
3	Bấm nút CALC , gán $x = i$ với i là đơn vị số phức, là nút ENG	
4	Kết quả màn hình trả về là: $\frac{8}{3} - \frac{16}{3}i$	-
5	Tương ứng với pt đi qua CĐ, CT là $y = -\frac{16}{3}x + \frac{8}{3}$	

VD2 : Giả sử đồ thị hàm số $\boldsymbol{y = x^3 - 3mx^2 + 3(m + 6)x + 1}$ có 2 cực trị. Khi đó đường thẳng đi qua hai điểm cực trị có phương trình là : *(trích từ đề thi chính thức của trường THPT Phạm Văn Đồng – Phú Yên)*

a) $y = 2x + m^2 + 6m + 1$

b) $y = -2x + m^2 + 6m + 1$

c) $y = 2(-m^2 + m + 6)x + m^2 + 6m + 1$

d) Tất cả đều sai

GIẢI

Để tìm phương trình đường thẳng qua CĐ, CT ta làm như sau:

BƯỚC	CÁCH THỰC HIỆN	MÀN HÌNH MÁY TÍNH
1	- Chuyển sang môi trường mode 2, nhập vào máy tính biểu thức: $x^3-3mx^2+3(m+6)x+1-\dfrac{(3x^2-6mx+3(m+6))(6x-6m)}{3\times 6}$ - Ấn dấu [=] để lưu lại biểu thức.	
2	- Bấm nút [CALC] , gán $x=i, m=100$ trong đó i là nút [ENG]	
3	- Kết quả màn hình trả về là: $10601-19788i$	
4	- Dịch kết quả : 10601=1|06|01 =1.(100)^2 +6.(100) + 1 = m^2 +6m +1 -19788 = -1|97|88 = - [10000 +(10000 – 300) +(100 -12)] = - (2.100^2 – 2.100 – 12) = - (2m^2 – 2m – 12) = 2(-m^2 + m + 6)	
5	- Tương ứng với pt đi qua CĐ, CT là $y=2(-m^2+m+6)x+m^2+6m+1$	Chọn **ĐÁP ÁN C**

III. Một vài tính chất của đại lượng E, F

Như đã nói ở phần mở đầu, nếu ta xem hàm $g(x)$ là hàm bậc nhất tuyến tính với 2 ẩn E và F. Khi đó E, F được tìm bằng cách cho 2 giá trị x bất kỳ, ta được hệ pt có dạng

$$\begin{cases} x_1E+F=g(x_1) \\ x_2E+F=g(x_1) \end{cases} \; trong \text{ đó } \; g(x)=y-\frac{y'.y''}{3.y'''}$$

Khi đó, ta thu được các kết quả sau:

a. Hệ số góc $E=g(a+1)-g(a)=const$ với $a\in R$

$$=\frac{g(a)-g(-a)}{2a} \quad với\ a\neq 0$$

$=g'(x)|_{x=x_i}=const$ với x_i là một giá trị bất kỳ

Trường hợp đặc biệt : $a=0\ thì\ E=g(1)-g(0)=g'(x)|_{x=0}$ là hệ số góc của tiếp tuyến của đường thẳng : $y=f'(0).(x-0)+f(0)$ tại điểm có hoành độ $x_0=0$.

Với $a=0\ thì\ E=g(1)-g(0)$ ta có cách tính E của PP. Hoàng Trọng Tấn

b. Hệ số tự do $\mathrm{F} = \mathrm{g}(0)$ (là cách tính F của PP. Hoàng Trọng Tấn)

$$= \frac{g(a) + g(-a)}{2a} \; với\; a \neq 0$$

c. Từ biểu thức g(x) ta thấy rằng đường thẳng này luôn qua 3 điểm đặc biệt của hàm số bậc 3 là điểm uốn, điểm cực đại và điểm cực tiểu hay 3 điểm đặc biệt này luôn thẳng hàng.

Bài tập áp dụng

Bài 1 : Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm CĐ, CT của các hàm số bậc 3 sau :

STT	ĐỀ BÀI	NGUỒN TÀI LIỆU
1	$y = x^3 - 3x$	*Trích đề thi toán Khối A-2015*
2	$y = -x^3 + 3x^2 + 3mx - 11$	*Trích đề thi toán Khối A-2013*
3	$y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$	*Trích đề thi toán Khối A-2010*
4	$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$	*Trích đề thi toán Khối A-2006*
5	$y = x^3 - 3mx + 1$	*Trích đề thi toán Khối D-2014*
6	$y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6x$	*Trích đề thi toán Khối B-2013*
7	$y = x^3 - 3mx^2 + 3m^3$	*Trích đề thi toán Khối B-2012*
8	$y = 4x^3 - 6x^2 + 1$	*Trích đề thi toán Khối B-2008*
9	$y = x^3 - 5x^2 + 4x + 1$	*Trích từ tài liệu phương pháp tính nhanh đường thẳng cực trị (trên mạng), tác giả Hoàng Trọng Tấn*
10	$y = \frac{x^3}{2} - 2x^2 + 1$	
11	$y = x^3 - 3x + 2$	*Như trên*
12	$y = \frac{x^3}{3} - 6x^2 + 3x + 4$	*Như trên*
13	$y = x^3 - 3x^2 + 4x + 4$	*Như trên*
14	$y = x^3 - 2x^2 - 5x + 1$	*Như trên*
15	$y = x^3 - 4x^2 - x + 1$	*Như trên*
16	$y = x^3 + 3mx^2 - 5mx + m^2$-m-1	*Như trên*
17	$y = x^3 + (m+1)x^2 + 2x - m$	*Tuyển tập hàm số, tác giả Đặng Việt Hùng*
18	$y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1-m^2)x + m^3 - m^2$	*Như trên*
19	$y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$	*Như trên*
20	$y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$	*Trang 86, chuyên đề h. số, tác giả Trần Đình Cư*

Bài 2 : Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m+6)x + 1\ (C)$. Tìm m để điểm A(3;5) thuộc đường thẳng đi qua các điểm cực đại , cực tiểu của hàm số (C) *(trích từ bài 23 tài liệu tuyển tập các bài toán hàm só của tác giả Đặng Việt Hùng)*

Bài 3 : Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 + 7x + 3\ (C)$. Tìm m để đường thẳng đi qua điểm CĐ, CT của đồ thị hàm số (C) _|_ với đường thẳng (d) : $3x - y - 7 = 0$. (*(trích từ bài 19 tài liệu tuyển tập các bài toán hàm só của tác giả Đặng Việt Hùng)*

Bài 4 : Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + m\ (C)$ có cực đại và cực tiểu và hai điểm này đối xứng nhau qua $y = x/2 - 5/2$. *(trích từ chuyên đề hàm số, tác giả Trần Đình Cư)*

HƯỚNG DẪN – ĐÁP ÁN

Bài 1 : Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm CĐ, CT của các hàm số bậc 3 sau :

STT	ĐỀ BÀI	KQ FX570VN	ĐÁP SỐ
1	$y=x^3-3x$	$(X^3-3X)-\frac{(3X^2-3)}{3\times6}$ ▸ $-2i$	$y=-2x$
2	$y=-x^3+3x^2+3mx-11$	$(-X^3+3X^2+3MX-11$ ▸ $89+202i$	$y=(2m+2)x+m-11$
3	$y=x^3-2x^2+(1-m)x+m$	$X^3-2X^2+(1-M)X+$ ▸ $78-\frac{602}{9}i$	$y=-\left(\frac{2}{3}m+\frac{2}{9}\right)x+m-22$
4	$y=2x^3-9x^2+12x-4$	$2X^3-9X^2+12X-4-$ ▸ $2-i$	$y=-x+2$
5	$y=x^3-3mx+1$	$X^3-3MX+1-\frac{(3X^2-}{3X}$ ▸ $1-200i$	$y=-2mx+1$
6	$y=2x^3-3(m+1)x^2+6x$	$2X^3-3(M+1)X^2+6$ ▸ $101-10197i$	$y=-(m^2+2m-3)x+m+1$
7	$y=x^3-3mx^2+3m^3$	$X^3-3MX^2+3M^3-$ ▸ $3000000-20000i$	$y=-2m^2x+3m^3$
8	$y=4x^3-6x^2+1$	$4X^3-6X^2+1-(12X^2$ ▸ $1-2i$	$y=-2x+1$
9	$y=x^3-5x^2+4x+1$	$X^3-5X^2+4X+1-(3$ ▸ $\frac{29}{9}-\frac{26}{9}i$	$y=-\frac{26}{9}x+\frac{29}{9}$
10	$y=\frac{x^3}{2}-2x^2+1$	$\frac{X^3}{2}-2X^2+1-\frac{(}{2}$ ▸ $1-\frac{16}{9}i$	$y=-\frac{16}{9}x+1$
11	$y=x^3-3x+2$	$X^3-3X+2-\frac{(3X^2-3)}{3\times6}$ ▸ $2-2i$	$y=-2x+2$
12	$y=\frac{x^3}{3}-6x^2+3x+4$	$\frac{X^3}{3}-6X^2+3X+4-(X^2$ ▸ $10-22i$	$y=-22x+10$
13	$y=x^3-3x^2+4x+4$	$X^3-3X^2+4X+4-(3$ ▸ $\frac{16}{3}+\frac{2}{3}i$	$y=\frac{2}{9}x+\frac{16}{3}$
14	$y=x^3-2x^2-5x+1$	$X^3-2X^2-5X+1-(3$ ▸ $-\frac{1}{9}-\frac{38}{9}i$	$y=-\frac{38}{9}x-\frac{1}{9}$
15	$y=x^3-4x^2-x+1$	$X^3-4X^2-X+1-(3X$ ▸ $\frac{5}{9}-\frac{38}{9}i$	$y=-\frac{38}{9}x+\frac{5}{9}$

16	$y = x^3 + 3mx^2 - 5mx + m^2$-m-1	X³+3MX²-5MX+M²-▷ $\frac{79697}{3}-\frac{61000}{3}i$	$y = -\frac{6m^2+10m}{3}x + \frac{8m^2-3m-3}{3}$
17	$y = x^3 + (m+1)x^2 + 2x - m$	X³+(M+1)X²+2X-M▷ $-\frac{1102}{9}-\frac{20390}{9}i$	$y = -\frac{2m^2+4m-10}{9}x - \frac{11m+2}{9}$
18	$y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1-m^2)x + m^3 - m^2$	-X³+3MX²+3(1-M²▷ -9900+2i	$y = 2x - (m^2 - m)$
19	$y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$	X³-3X²-MX+2-(3▷ $-\frac{94}{3}-\frac{206}{3}i$	$y = -(\frac{2}{3}m + 2)x - (\frac{m}{3} - 2)$
20	$y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$	X³-3MX²+4M³-(3▷ 4000000-20000i	$y = -2m^2x + 4m^3$